**Программа утверждена на заседании кафедры теории чисел**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Современные методы аналитической теории чисел.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация: Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

*Объем дисциплины (модуля) составляет 5зачетных единицы, всего 180 часов, из которых 70 часов составляет контактная работа студента с преподавателем (62 часа занятия лекционного типа, 8 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации),110 часов составляет самостоятельная работа студента.*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: введение в теорию дзета-функции Римана, аналитическая теория чисел.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные методы дисциплин из пункта 1).

Уметь: решать стандартные задачи тех же дисциплин и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами тех же дисциплин.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам\* (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 2 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 3 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 4 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 5 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 6 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 7 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 8 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 9 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 10 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 11 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 12 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 13 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 14 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 15 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 16 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 17 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 18 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 19 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 20 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 21 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 22 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 23 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 24 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 25 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 26 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 27 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 28 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 29 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 30 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 31 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 32 | 2 |  |  |  |  |  | 0 | 2 |  | 2 |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 24 |  |  |  |  | 2 | 2 | 22 |  | 22 |
| **Итого** | 180 | 62 |  |  |  | 8 | 70 | 110 |  | 110 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «незачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы:

1. И.М.Виноградов, «Основы теории чисел». М., Наука, 1976
2. А.А.Карацуба, «Основы аналитической теории чисел», 2-е изд. М., Наука, 1883.
3. М.Е.Чанга, «Методы аналитической теории чисел», Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2013.
4. Х. Иванец, Э. Ковальский, «Аналитическая теория чисел», М., МЦНМО, 2014.

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Современные методы аналитической теории чисел.
2. Преподаватель - проф. М. А. Королёв.
3. Аннотация курса: Цель курса – познакомить учащихся с тригонометрическими суммами Клоостермана, которые, с одной стороны, представляют самостоятельный интерес для изучения, и, с другой стороны, являются мощным средством для решения задач теории чисел.
4. Тематическое содержание курса

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Кольцо вычетов по заданному модулю. Сравнения. Понятие обратного вычета. Численые примеры. |
| Тема 2 | Полные суммы Клоостермана. Определение и простейшие свойства (мультипликативность и пр.) |
| Тема 3 | Оценки Салье полных сумм Клоостермана для случая, когда модуль является степенью простого числа p не ниже второй. Доказательство для нечетного p (отдельно разбираются случаи четного и нечетного показателей). |
| Тема 4 | Оценки Салье полных сумм Клоостермана для случая, когда модуль является степенью простого числа p не ниже второй. Доказательство для четного p=2 (отдельно разбираются случаи четного и нечетного показателей). |
| Тема 5 | Приём «мультипликативного сдвига» при оценках тригонометрических сумм. Оценка Клоостермана полной суммы в случае, когда модуль является первой степенью простого числа. Различные способы ее доказательства, принадлежащие Г.Д.Клоостерману, И.М.Виноградову, Д.И.Толеву. |
| Тема 6 | Оценка полной суммы в случае, когда модуль является первой степенью простого числа, принадлежащая Г.Дэвенпорту. |
| Тема 7 | Оценка полной суммы в случае, когда модуль является первой степенью простого числа, принадлежащая А.Вейлю (краткая схема доказательства). Оценка полной суммы Клоостермана по произвольному модулю. |
| Тема 8 | Неполные суммы Клоостермана. Способы сведения неполных сумм к полным суммам. Следствия из оценок Г.Салье и А.Вейля для неполных сумм. |
| Тема 9 | Прием «аддитивного сдвига» в оценках тригонометрических сумм. Элементарное доказательство нетривиальной оценки неполных сумм Клоостермана в случае, когда модуль является простым числом, а количество слагаемых в ней превышает степень модуля. |
| Тема 10 | Функция Мангольдта, ее простейшие свойства. Суммы по простым числам. Тождества Вона-Виноградова. |
| Тема 11 | Сумма Клоостермана по простым числам по простому модулю . Оценка М.З.Гараева (). Лемма Д.Р.Хиз-Брауна об оценке числа решений симметричного сравнения. |
| Тема 12 | Сумма Клоостермана по простым числам по простому модулю. Оценка Ж.Бургейна-Р.Бейкера (). Ее сведение к двойным суммам двух типов. Оценки сумм первого типа. |
| Тема 13 | Сумма Клоостермана по простым числам по простому модулю. Оценка Ж.Бургейна-Р.Бейкера (). (продолжение). Оценки сумм первого типа. Случай «однородной» суммым (). Сведение к оценки мощнности «исключительного множества» . |
| Тема 14 | Сумма Клоостермана по простым числам по простому модулю. Оценка Ж.Бургейна-Р.Бейкера (). Случай «однородной» суммым (). Оценка мощнности «исключительного множества» (продолжение). |
| Тема 15 | Сумма Клоостермана по простым числам по простому модулю. Оценка Ж.Бургейна-Р.Бейкера (). Случай «неоднородной» суммым (). Определение и оценка мощнности «исключительного множества» (продолжение). |
| Тема 16 | Применение оценок сумм Клоостермана к задачам теории чисел. Аддитивная проблема делителей Ингама (начало). |
| Тема 17 | Применение оценок сумм Клоостермана к задачам теории чисел. Аддитивная проблема делителей Ингама (продолжение). |
| Тема 18 | Применение оценок сумм Клоостермана к задачам теории чисел. Аддитивная проблема делителей Ингама (продолжение). |
| Тема 19 | Применение оценок сумм Клоостермана к задачам теории чисел. Дроби Фарея, их простейшие свойства. Точки целочисленной решетки со взаимно-простыми координатами. Задача о «деревьях» в узлах решетки, видимых из начала координат (начало). |
| Тема 20 | Применение оценок сумм Клоостермана к задачам теории чисел. Задача о «деревьях» в узлах решетки, видимых из начала координат (продолжение). |
| Тема 21 | Применение оценок сумм Клоостермана к задачам теории чисел. Задача о «деревьях» в узлах решетки, видимых из начала координат (продолжение). |
| Тема 22 | Применение оценок сумм Клоостермана к задачам теории чисел. Задача о количестве представлеий числа суммою четырех квадратов (начало). Суммы Гаусса. |
| Тема 23 | Применение оценок сумм Клоостермана к задачам теории чисел. Задача о количестве представлеий числа суммою четырех квадратов (продолжение). Круговой метод. Разбиение отрезка интегрирования на «дуги». |
| Тема 24 | Применение оценок сумм Клоостермана к задачам теории чисел. Задача о количестве представлеий числа суммою четырех квадратов (продолжение). Круговой метод. Разбиение отрезка интегрирования на «дуги». |
| Тема 25 | Оценки сумм Клоостермана с числом слагаемых . Метод А.Г.Постникова для случая, когда модуль q является растушей степенью простого числа (начало). Теорема И.М.Виноградова о среднем (формулировка). Вспомогательные леммы. |
| Тема 26 | Оценки сумм Клоостермана с числом слагаемых . Метод А.Г.Постникова для случая, когда модуль q является растушей степенью простого числа (продолжение). Вспомогательные леммы. |
| Тема 27 | Метод А.А.Карацубы оценок сумм Клоостермана с числом слагаемых . (начало) Оценка числа решений симметричного сравнения. |
| Тема 28 | Метод А.А.Карацубы оценок сумм Клоостермана с числом слагаемых . (продолжение) Оценка двойной суммы Клоостермана специального вида. |
| Тема 29 | Метод А.А.Карацубы оценок сумм Клоостермана с числом слагаемых . (продолжение) Сведение оценки суммы по «сплошному промежутку» к оценкам двойных сумм. |
| Тема 30 | Метод А.А.Карацубы оценок сумм Клоостермана с числом слагаемых . (продолжение). Приложение полученных оценок к задачам о распределении дробных долей специального вида. Лемма о «стаканчике Виноградова». |
| Тема 31 | «Оценка сумм-произведений» Ж.Бургейна (формулировка). Её применение к оценкам коротких сумм Клоостермана (по работам Ж.Бургейна и М.З.Гараева) (начало). |
| Тема 32 | Нелинейные суммы Клоостермана. |

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

Вопросы к экзамену:

1). Кольцо вычетов по заданному модулю. Понятие обратного вычета. Отыскание обратного вычета (на численных примерах).

2) Определение полной суммы Клоостермана. Доказательство свойства мультипликативности полных сумм.

3) Оценка Салье полной сумм Клоостермана по модулю для случая, когда , – нечетное простое, – четное число.

4) Оценка Салье полной сумм Клоостермана по модулю для случая, когда , – нечетное простое, – нечетное число.

5) Оценка Салье полной сумм Клоостермана по модулю для случая, когда , , – четное число.

6) Оценка Салье полной сумм Клоостермана по модулю для случая, когда , , – нечетное число.

7) Оценка Г.Д. Клоостермана полной суммы в случае, когда модуль является первой степенью простого числа.

8) Оценка И.М.Виноградова полной суммы в случае, когда модуль является первой степенью простого числа.

9) Оценка Д.И.Толева полной суммы в случае, когда модуль является первой степенью простого числа.

10) Оценка Г.Дэвенпорта полной суммы в случае, когда модуль является первой степенью простого числа.

11) Оценка неполной суммы Клоостермана в случае произвольного модуля (оценка А.Вейля используется без доказательства).

12) Оценка неполной суммы Клоостермана с применением аддитивного сдвига.

13) Функция Мангольдта, ее свойства.

14) Тождества Виноградова-Вона для сумм по простым числам.

15) Оценка Д.Р.Хиз-Брауна числа решений симметричного сравнения.

16) Доказательство оценки М.З.Гараева суммы Клоостермана по простым числам ()..

17) Сведение суммы по простым числам к суммам двух типов в случае . Оценка сумм первого типа.

18) Оценка числа решений полиномиального сравнения.

19) Определение и оценка мощности «исключительного» множества.

20) Оценка Ж.Бургейна-Р.Бейкера суммы по простым числам.

21) Аддитивная проблема делителей Ингама. Выделение главного члена.

22) Аддитивная проблема делителей Ингама. Оценка остаточного члена.

23) Дроби Фарея, их простейшие свойства. Задача о деревьях в узлах целочисленной решетки.

24) Суммы Гаусса, их простейшие свойства.

25) Формуля для числа представлений суммой четырех квадратов. Разбиение на дуги.

26) Формуля для числа представлений суммой четырех квадратов. Выделение «главного члена».

27) Формуля для числа представлений суммой четырех квадратов. Оценка «остаточного члена»

28) Оценка А.Г.Постникова короткой суммы Клоостермана.

29) Оценка А.А.Карацубы числа решений симметричного сравнения.

30) Оценка А.А.Карацубы двойной суммы Клоостермана.

31) Сведение оценки суммы Клоостермана по сплошному промежутку к оценкам двойных сум.

32) Оценка Бургейна-Гараева короткой суммы Клоостермана.

1. Перечень дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

1. Официальная страница издания «Лекционные курсы НОЦ» портала Math-Net.ru (курсы М.Е.Чанги):

<http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=lkn&paperid=2&option_lang=rus>

<http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=lkn&paperid=13&option_lang=rus>

1. Интернет-сайт <http://mathworld.wolfram.com/>
2. Интернет-архив электронных публикаций <http://arxiv.org/>

**Приложение утверждено на заседании кафедры теории чисел**